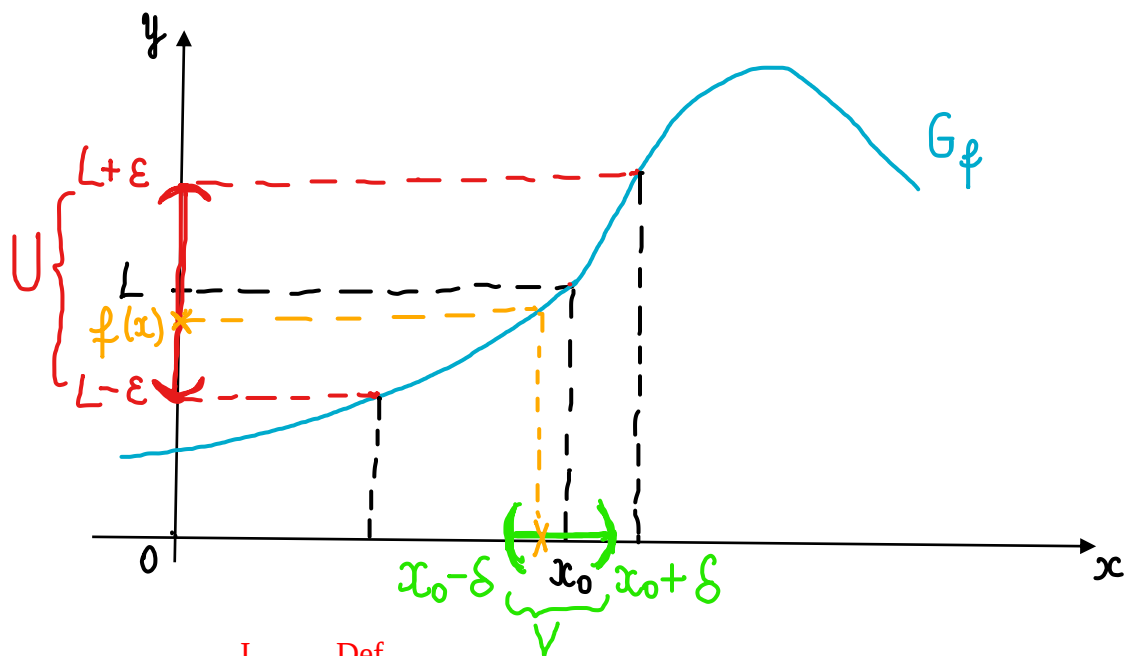


Definiția limitei unei funcții într-un punct (M₂)



Obs. i) $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \mid -x_0$

$$\Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$$

$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \delta$$

ii) $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \mid -L$

$$\Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - L < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

I. Def.

Fie $D \subset \mathbb{R}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; $L \in \mathbb{R}$; x_0 punct de acumulare pt. D

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ dacă $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ astfel încât dacă $0 < |x - x_0| < \delta$, atunci $|f(x) - L| < \epsilon$

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ dacă $\forall U \in \mathcal{V}(L) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât dacă $x \in V \setminus \{x_0\}$ atunci $f(x) \in U$.

II. Ex.

Demonstrați, folosind criteriul $\varepsilon - \delta$ că $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \underbrace{\delta > 0}_{\delta=?}$ astfel încât dacă $0 < \underbrace{|x-1|}_{(2)} < \delta$, atunci $\underbrace{|3x+2-5|}_{(1)} < \varepsilon$

$$(1) \Leftrightarrow |3x-3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 3|x-1| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2) \quad \left. \vphantom{\frac{\varepsilon}{3}} \right\} \Rightarrow \text{Se poate alege } \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

III. Def.

Fie $D \subset \mathbb{R}$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$; $L_s(x_0) \in \mathbb{R}$; $L_d(x_0) \in \mathbb{R}$; x_0 punct *de acumulare pt. D*

i) $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = L_s(x_0)$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ astfel încât dacă $x_0 - \delta < x < x_0$, atunci $|f(x) - L_s(x_0)| < \varepsilon$

ii) $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = L_d(x_0)$ dacă $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ astfel încât dacă $x_0 < x < x_0 + \delta$, atunci $|f(x) - L_d(x_0)| < \varepsilon$

IV. Prop.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow L_s(x_0) = L_d(x_0) = L$$